

フランジ付方形導波管を用いた損失誘電体からの反射係数の検討——基本モード反射係数の理論値と実測値の比較——

平野 誠† (学生員) 高橋 応明† (正員)  
安部 實† (正員)

A Study on Reflection Coefficient from Lossy Dielectric by Using Flanged Rectangular Waveguide —Comparison between Theoretical and Measured Reflection Coefficient of Dominant Mode—

Makoto HIRANO†, Student Member,  
Masaharu TAKAHASHI†, and Minoru ABE†, Members

† 武蔵工業大学工学部電子通信工学科, 東京都  
Department of Electronics and Communication Engineering,  
Faculty of Engineering Musashi Institute of Technology, 1-28-1,  
Tamazutsumi, Setagaya-ku, Tokyo, 158-8557 Japan

あらまし フランジ付き方形導波管を金属裏打ちの損失誘電体シートに押し当て、開口面からの反射係数を測定することにより、誘電体の複素誘電率を求めることができ、非破壊測定法として有効である。そのためには、開口面における反射係数を正確に求めなければならない、反射係数と誘電率の関係も明らかにする必要がある。ここでは、本構造の解析法として既に提案されている方法に基づいて、損失誘電体内の電界をスペクトル領域法で求め、開口面における磁界の境界条件より得られる導波管側の電磁波各モードの振幅を定める未知係数の連立方程式を解き、反射係数を求めた。連立方程式を解くために必要なモード数について検討し、高次モードが特に多く発生する厚さを除けば、遮断波長の大きい順に6個のモードを用いると実測値ともよく一致することを確認した。

キーワード フランジ付方形導波管, スペクトル領域法, 複素誘電率, モード解析

1. ま え が き

電波吸収体やレド-ム等の設計を行う際、材料の誘電率や透磁率(以下、材料定数と呼ぶ)を正確に知る必要が生じる。マイクロ波帯における材料定数の測定法としては導波管法がよく用いられるが[1]、これは測定用導波管の寸法に合わせた試料を作らなければならない、加工に手間を要する上、管壁とのすきまによる誤差が生じることがあり、特に周波数が高い場合に不利となる。これに対し、非破壊測定法として、フランジ付方形導波管を金属裏打ちの電波吸収体に押し当て、表面インピーダンスを測定する方法が提案されている

が[2],[3]、これらの報告では理論検討のみであり、実測値との比較がなされていない。そこで、解析結果と実験結果の比較を試みた。誘電体内はスペクトル領域法を、導波管内はモード関数をそれぞれ用いて電磁界を表し、導波管内の各モードの振幅を定める未知数による連立方程式を誘導する[2]。計算に用いる未知係数の個数を検討し、6個の未知数(モード数)で方程式を解いた結果は実測値とよく一致することが確かめられ、解析方法の有効性が立証できた。この解析方法を用いて、複素比誘電率  $\epsilon_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r$  と基本波の反射係数  $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$  との関係を求めれば、 $\Gamma$  の測定値から  $\epsilon_r$  を知ることができる。

2. 理 論 式

ここでは、図1(a)に示すフランジ付方形導波管を、同図(b)のように金属裏打ちの損失誘電体に押し当てた場合に、基本モードの反射係数  $\Gamma$  と誘電体の複素比誘電率  $\epsilon_r$  の関係を求める。解析手法については、文献[2]ではヘルツベクトルを用いているのに対し、ここではベクトルポテンシャルを適用して導出を行った。以下に結果を述べる。

図1(b)において、第I領域を導波管内部、第II領域を誘電体内部とする。各領域では、TE波のベクトルポテンシャルのz成分  $\Psi^I, \Psi^{II}$  と、TM波のベクトルポテンシャルのz成分  $\phi^I, \phi^{II}$  が、以下のヘルムホルツ波動方程式を満足する。

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} \Psi^i \\ \phi^i \end{pmatrix} + k_l^2 \begin{pmatrix} \Psi^i \\ \phi^i \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

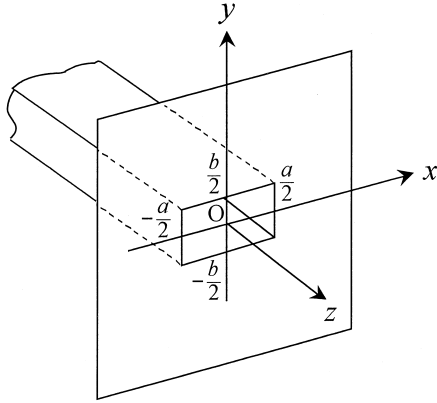
ただし、 $k_l^2 = \omega^2 \mu_l \epsilon_l$  ( $i = I, II, l = 1, 2$ )

入射波は基本モード(TE<sub>10</sub>波)とし、開口面の不連続形状により開口面上では、新たに基本モードを含む多数の高次モードが発生する。そこで、発生するTE<sub>mn</sub>, TM<sub>mn</sub> モードの電磁界を表すベクトルポテンシャルの未知係数を、それぞれ  $C_{mn}, D_{mn}$  とする。z = 0における境界条件としては、電界、磁界ともに開口面の接線成分が連続であり、このうち電界についてはフランジ上で接線成分が0であることから、以下のように示される。

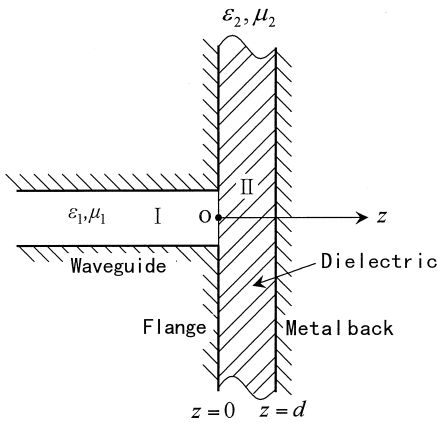
$$E_x^{II} = \begin{cases} E_x^I; & \text{開口面上} \\ 0; & \text{フランジ上} \end{cases} \tag{2a}$$

$$E_y^{II} = \begin{cases} E_y^I; & \text{開口面上} \\ 0; & \text{フランジ上} \end{cases} \tag{2b}$$

$$H_x^{II} = H_x^I; \text{開口面上} \tag{2c}$$



(a) フランジ付方形導波管



(b) 解析構造

図1 フランジ付方形導波管と解析構造

Fig.1 Flanged rectangular waveguide and structure of the analysis. (a) Flanged rectangular waveguide (b) Structure of the analysis

$$H_y^{\text{II}} = H_y^{\text{I}}; \text{開口面上} \quad (2d)$$

まず、電界の境界条件式に基づいて、第II領域の電界のスペクトルが求まり、ベクトルポテンシャルのスペクトルが未知係数  $C_{mn}$ ,  $D_{mn}$  を用いて表され、これより磁界のスペクトル表現が得られる。次に、磁界のスペクトルをフーリエ逆変換することにより、第II領域の磁界が同じく  $C_{mn}$ ,  $D_{mn}$  で表され、これを(2c),(2d)に適用して、 $C_{mn}$ ,  $D_{mn}$  に関する無限元連立方程式が導出され、次式ようになる。

$$\begin{aligned} & - \sum_{m,n} \left( \frac{k_x^1 k_z^1}{\omega \mu_1} \delta_{nly}^m + P_{Cx}(m, n, k, l) \right) C_{mn} \\ & + \sum_{m,n} (k_y^1 \delta_{nly}^m - P_{Dx}(m, n, k, l)) D_{mn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = - \frac{k_x^1 k_z^1}{\omega \mu_1} \delta_{0ly}^1 + P_{Cx}(1, 0, k, l) \\ & - \sum_{m,n} \left( \frac{k_y^1 k_z^1}{\omega \mu_1} \delta_{nly}^m + P_{Cy}(m, n, k, l) \right) C_{mn} \\ & - \sum_{m,n} (k_x^1 \delta_{nly}^m + P_{Dy}(m, n, k, l)) D_{mn} \\ & = P_{Cy}(1, 0, k, l) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、上式中の  $P_{Cx}(m, n, k, l)$ ,  $P_{Dx}(m, n, k, l)$ ,  $P_{Cy}(m, n, k, l)$ ,  $P_{Dy}(m, n, k, l)$  及び、 $\delta_{nly}^m$ ,  $\delta_{nly}^m$  は、以下に示す式となる。

$$\begin{aligned} P_{Cx}(m, n, k, l) & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \\ & \times \left\{ \left( \frac{k_y^2 \omega \varepsilon_2}{k_z} + \frac{k_x^2 k_z}{\omega \mu_2} \right) j k_x^1 \hat{\Phi}_{mny} \right. \\ & \left. + \left( \frac{-\omega \varepsilon_2}{k_z} + \frac{k_z}{\omega \mu_2} \right) j k_x k_y k_y^1 \hat{\Phi}_{mnx} \right\} \\ & \times \frac{-1}{\tan(k_z d)} \hat{\Phi}_{kly} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} P_{Dx}(m, n, k, l) & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \\ & \times \left\{ \left( \frac{-k_y^2 \varepsilon_2}{k_z} + \frac{-k_x^2 k_z}{\omega^2 \mu_2} \right) \frac{j k_y^1 k_z^1}{\varepsilon_1} \hat{\Phi}_{mny} \right. \\ & \left. + \left( \frac{-\varepsilon_2}{k_z} + \frac{k_z}{\omega^2 \mu_2} \right) \frac{j k_x k_y k_x^1 k_z^1}{\varepsilon_1} \hat{\Phi}_{mnx} \right\} \\ & \times \frac{-1}{\tan(k_z d)} \hat{\Phi}_{kly} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} P_{Cy}(m, n, k, l) & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \\ & \times \left\{ \left( \frac{-\omega \varepsilon_2}{k_z} + \frac{k_z}{\omega \mu_2} \right) j k_x k_y k_x^1 \hat{\Phi}_{mny} \right. \\ & \left. + \left( \frac{k_x^2 \omega \varepsilon_2}{k_z} + \frac{k_y^2 k_z}{\omega \mu_2} \right) j k_y^1 \hat{\Phi}_{mnx} \right\} \\ & \times \frac{-1}{\tan(k_z d)} \hat{\Phi}_{kly} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (4c)$$

$$\begin{aligned} P_{Dy}(m, n, k, l) & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \\ & \times \left\{ \left( \frac{\varepsilon_2}{k_z} + \frac{-k_z}{\omega^2 \mu_2} \right) \frac{j k_x k_y k_y^1 k_z^1}{\varepsilon_1} \hat{\Phi}_{mny} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{k_x^2 \varepsilon_2}{k_z} + \frac{k_y^2 k_z}{\omega^2 \mu_2} \right) \frac{j k_x^I k_z^I \hat{\Phi}_{mnx}}{\varepsilon_1} \Big\} \\
& \times \frac{-1}{\tan(k_z d)} \hat{\Phi}_{klx} dk_x dk_y \quad (4d)
\end{aligned}$$

ただし、 $\hat{\Phi}_{mny}$ 、 $\hat{\Phi}_{mnx}$  は、分布関数  $\Phi_{mny}$ 、 $\Phi_{mnx}$  のフーリエ変換であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{mny} & = \left( \frac{\sin(k_x^I + k_x) \frac{a}{2}}{k_x^I + k_x} j^{m-1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sin(k_x^I - k_x) \frac{a}{2}}{k_x^I - k_x} (-j)^{m+1} \right) \\
& \quad \times \left( \frac{\sin(k_y^I + k_y) \frac{b}{2}}{k_y^I + k_y} j^n + \frac{\sin(k_y^I - k_y) \frac{b}{2}}{k_y^I - k_y} (-j)^n \right) \quad (5a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{mnx} & = \left( \frac{\sin(k_x^I + k_x) \frac{a}{2}}{k_x^I + k_x} j^m + \frac{\sin(k_x^I - k_x) \frac{a}{2}}{k_x^I - k_x} (-j)^m \right) \\
& \quad \times \left( \frac{\sin(k_y^I + k_y) \frac{b}{2}}{k_y^I + k_y} j^{n-1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sin(k_y^I - k_y) \frac{b}{2}}{k_y^I - k_y} (-j)^{n+1} \right) \quad (5b)
\end{aligned}$$

$$\delta_{nly}^{mk} = \begin{pmatrix} \frac{ab}{4} (m = k \text{ かつ } n = l > 0) \\ \frac{ab}{2} (m = k \text{ かつ } n = l = 0) \\ 0 (m \neq k \text{ 又は } n \neq l) \end{pmatrix} \quad (6a)$$

$$\delta_{nlx}^{mk} = \begin{pmatrix} \frac{ab}{4} (m = k \text{ かつ } n = l > 0) \\ 0 (m \neq k \text{ 又は } n \neq l \\ \text{又は } n = 0 \text{ 又は } l = 0) \end{pmatrix} \quad (6b)$$

式(3)を解いて得られる  $C_{mn}$ 、 $D_{mn}$  より、開口面に生じる各モードの電界  $E_y$  は、それぞれ次式で表される。

$$\text{TE}_{mn} \text{波} : -k_x^I C_{mn} \quad \text{TM}_{mn} \text{波} : \frac{k_y^I k_z^I}{\omega \varepsilon_1} D_{mn} \quad (7)$$

これらのうち高次モードは、導波管内を伝搬しないので、入射電界との振幅比をとり開口面における高次モード発生率と定義し、発生する基本モードは反射波として導波管内を伝搬するので、その発生率を反射係数  $\Gamma (= C_{10})$  で表す。

### 3. 計算結果

ここでは、周波数10GHz、比誘電率  $\varepsilon_r = 5.25 - j0.3$  とし、導波管はX帯用のWRJ-10 ( $a=22.9\text{mm}$ ,  $b=10.2\text{mm}$ ) を対象として理論計算を行う。

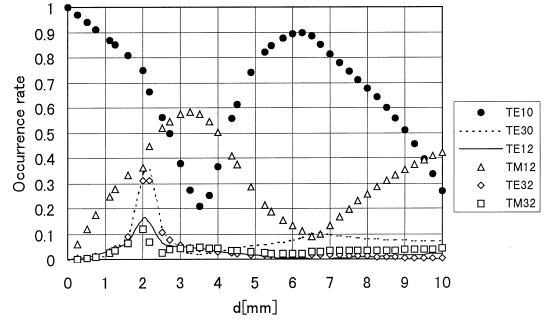


図2 開口面における各モードの発生率 (TE<sub>10</sub> は反射係数) (周波数: 10GHz, 比誘電率:  $\varepsilon_r = 5.25 - j0.3$ )  
Fig. 2 Occurrence rate of each mode at aperture. (Freq.: 10GHz, Relative permittivity:  $\varepsilon_r = 5.25 - j0.3$ )

式(3)は無次元の連立方程式であり、実際には有限個の変数(モード数)で打ち切らなければならない。そこで、まずモード数6を用いて開口面における各モード発生率の厚さ依存性を調べた結果を図2に示す。

同図より以下のことがわかる。

(a) 基本モードの反射係数は、 $d=3.5\text{mm}$  で極小点となるが、これより薄い  $d=2\text{mm}$  において、高次モード発生率の極大点が存在し、ここでは高次モードが集中的に発生する。この厚さでは、正確な理論値を得るために、高次モードの個数を十分にとる必要がある。

(b) TM<sub>12</sub>の発生率は他の高次モードに比べて大きく、基本モード反射波を超えることもある。極大・極小の関係は基本モードとほぼ逆になっている。

(c) 基本モード反射係数の極小点より厚い場合には、TM<sub>12</sub>以外の高次モード振幅は小さい。同図で、 $d=6.5\text{mm}$  におけるTM<sub>12</sub>の極小点付近では、すべての高次モード振幅が小さい。

図2ではモード数を6としたが、厚さにより高次モードの発生量が異なることが明らかになった。そこで、次に打ち切るモード数を調べるため、厚さを  $d=2.0\text{mm}$ ,  $3.5\text{mm}$  としたときの、計算に用いるモードの数による反射係数  $\Gamma$  の大きさ  $|\Gamma|$  と位相  $\phi$  を計算し、結果をそれぞれ図3(a),(b)に示す。横軸はモード数を表している。計算に用いた各モードは、導波管の対称性により、 $m$  に関して奇数、 $n$  に関して偶数とし、表1に示すように、TE波を先として  $m+n$  が小さいモードから順に加えている(表2)。

図3より、モード数を増やすに従い  $|\Gamma|$  や  $\phi$  は大きく変化し、 $d=2.0\text{mm}$  では9個、 $d=3.5\text{mm}$  では4個以

表 1 計算に用いた反射波モード

Table 1 Reflection modes used in the calculation.

Mode Number	Mode
1	TE <sub>10</sub> のみ
2	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub>
3	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub>
4	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub>
5	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub> , TE <sub>32</sub>
6	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub> , TE <sub>32</sub> , TM <sub>32</sub>
7	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub> , TE <sub>32</sub> , TM <sub>32</sub> , TE <sub>60</sub>
8	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub> , TE <sub>32</sub> , TM <sub>32</sub> , TE <sub>50</sub> , TE <sub>14</sub>
9	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub> , TE <sub>32</sub> , TM <sub>32</sub> , TE <sub>60</sub> , TE <sub>14</sub> , TM <sub>14</sub>
10	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub> , TE <sub>32</sub> , TM <sub>32</sub> , TE <sub>50</sub> , TE <sub>14</sub> , TM <sub>14</sub> , TE <sub>52</sub>
11	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub> , TE <sub>32</sub> , TM <sub>32</sub> , TE <sub>60</sub> , TE <sub>14</sub> , TM <sub>14</sub> , TE <sub>52</sub> , TM <sub>52</sub>
12	TE <sub>10</sub> , TE <sub>30</sub> , TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub> , TE <sub>32</sub> , TM <sub>32</sub> , TE <sub>50</sub> , TE <sub>14</sub> , TM <sub>14</sub> , TE <sub>52</sub> , TM <sub>52</sub> , TE <sub>70</sub>

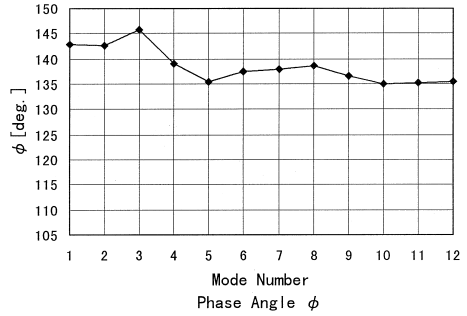
表 2 各モードの遮断波長

Table 2 Cut off wavelength of each mode.

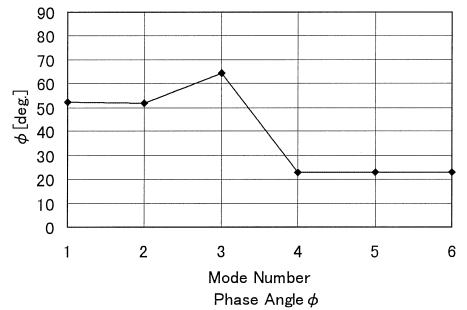
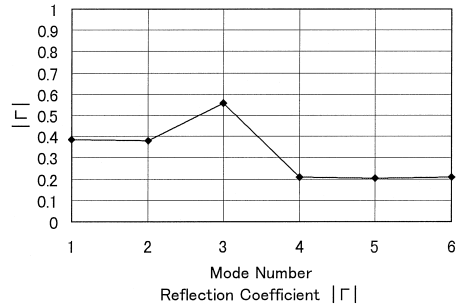
Mode	Cut off wavelength (mm)
TE <sub>10</sub>	45.8
TE <sub>30</sub>	15.3
TE <sub>12</sub>	10.0
TM <sub>12</sub>	10.0
TE <sub>32</sub>	8.48
TM <sub>32</sub>	8.48
TE <sub>50</sub>	9.16
TE <sub>14</sub>	5.07
TM <sub>14</sub>	5.07
TE <sub>52</sub>	6.82
TM <sub>52</sub>	6.82
TE <sub>70</sub>	6.54

上で  $|\Gamma|$  や  $\phi$  にほとんど変化がなくなり、安定する。

モード数が3から4に増加するとき  $|\Gamma|, \phi$  ともに変化が大きい。モード数3と4の結果はそれぞれ、TM<sub>12</sub> を含まない、含んだときの反射係数であるから、より正確な反射係数を得るには、TM<sub>12</sub> を計算に含めることが必要であることがわかる。これは図2より、多くの厚さにおいてTM<sub>12</sub> がTE<sub>10</sub> (反射係数)に次いで大きいことから理解される。また、厚さ  $d=2\text{mm}$  では、図2よりTE<sub>30</sub> やTE<sub>32</sub> の発生率がTM<sub>12</sub> と同程度であるが、これらのモードを計算に加えても、反射係数  $|\Gamma|$  はほとんど変化しないことが図3(a)よりわ



(a) 反射係数の大きさ  $|\Gamma|$  と位相角  $\phi$  (厚さ  $d=2.0\text{mm}$ )



(b) 反射係数の大きさ  $|\Gamma|$  と位相角  $\phi$  (厚さ  $d=3.5\text{mm}$ )

図3 計算項数(モード数)による反射係数  $\Gamma$  の変化(周波数: 10GHz, 比誘電率:  $\epsilon_r = 5.25 - j0.3$ )

Fig.3 Reflection coefficient  $\Gamma$  versus the number of calculated mode. (Freq.:10GHz, Relative permittivity:  $\epsilon_r = 5.25 - j0.3$ ) (a) Reflection coefficient  $|\Gamma|$  and phase angle  $\phi$  ( $d=2.0\text{mm}$ ) (b) Reflection coefficient  $|\Gamma|$  and phase angle  $\phi$  ( $d=3.5\text{mm}$ )

かる．このように，計算に含める高次モードに関しては，TE波よりTM波の方が反射係数 $|\Gamma|$ の計算結果に大きく影響するようである．

#### 4. 実験結果

本解析法を実証するため，厚さを変えた試料について実験を行った．フランジには $x$ 方向に20cm， $y$ 方向に18cmの方形導波管を用い，その中央に導波管を接合させた．これを炭化けい素FRP製の金属裏打ち付損失誘電体に押し当て，ネットワークアナライザにより，開口面( $z=0$ )における反射係数 $\Gamma$ を測定した．

損失誘電体は1辺が15cmの正方形であり，理論式で仮定した無限平板とは異なる．そこで，端部を導体で短絡したものとししないものの測定値を比較したところ変化はなく，これより損失誘電体の端部では，電磁波が十分減衰しているものと判断した．

図4に，10GHzにおける反射係数の理論値及び測定結果を示す．

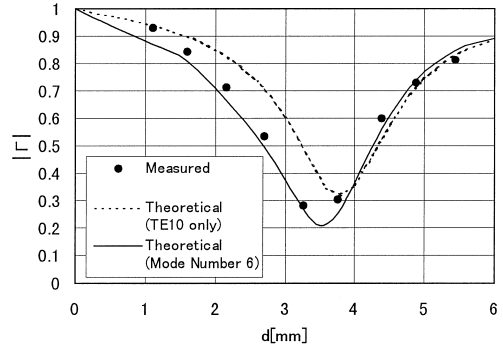
理論値にはモード数6で求めた結果と同時に，比較のためTE<sub>10</sub>反射のみで計算した結果も示した．比誘電率は，試料を切り出し，導波管法で測定した値 $\epsilon_r = 5.25 - j0.3$ を用いた．

同図より， $\Gamma$ をモード数6で計算した結果は，測定値によく一致することがわかる．このことから図1のモデルに対し，スペクトル領域法を適用した本解析が妥当であると判断される．また， $d=4\sim 6$ mmでは基本モードのみとしても測定値によく一致しているが，これは図2より，基本モードの反射係数 $|\Gamma|$ が大きく，高次モードが比較的小さいことによるものと考えられる．高次モードが多く発生する厚さ $d=2$ mm付近でも，図4より実験値に比較的良好一致しており，モード数6までの反射係数への寄与が大部分を占めるものと考えられる．

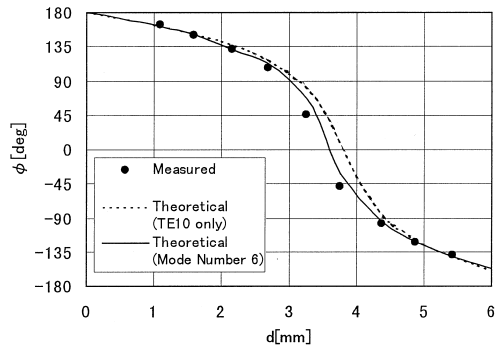
#### 5. むすび

フランジ付方形導波管を金属裏打ちの損失誘電体に押し当て，導波管の開口面の反射係数を測定する方法について，理論計算及び実験による検討を行った．その結果，遮断波長の大きい順に6個のモードを対象に算出した基本モード反射係数 $\Gamma$ は，実験結果によく一致することが確認された．

本解析結果を考慮に入れ，式(3)より，あらかじめ誘電率 $\epsilon_r$ に対する反射係数 $\Gamma$ を算出した結果をグラフ化しておき，これを用いて反射係数の測定値から



(a) 反射係数の大きさ  $|\Gamma|$



(b) 位相角  $\phi$

図4 試料の厚さによる基本モード反射係数 $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$ の変化(周波数: 10GHz, 比誘電率:  $\epsilon_r = 5.25 - j0.3$ )

Fig. 4 Dominant mode reflection coefficient  $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$  versus thickness of test slab. (Freq.: 10GHz, Relative permittivity :  $\epsilon_r = 5.25 - j0.3$ ) (a) Reflection coefficient  $|\Gamma|$  (b) Phase angle  $\phi$

試料の誘電率 $\epsilon_r$ を特定することが可能と考えられる．このための検討を，今後進める予定である．

謝辞 本研究を進めるにあたり，有益な御助言をいただいた関口利男 東京工業大学名誉教授に心からの謝意を表すとともに，測定用試料を製作していただいた横浜ゴム(株)の田所眞人氏，宮崎輝規氏に感謝する．

#### 文献

- [1] 大河内正陽, 牧本利夫, “マイクロ波測定,” オーム社, 1959.
- [2] 吉富邦明, “導体板上の電波吸収体の表面インピーダンス,” 電磁界理論研究会, EMT-92-29, 1992.
- [3] 橋本 修, 泰地義和, 阿部琢美, “フランジ付方形導波管を用いた複素誘電率の非破壊測定に関する基礎検討,” 計測研究会, IM-97-21, 1997.

(平成10年7月29日受付, 12月21日再受付)